

Квадратный трехчлен и его приложение

Пояснительная записка

Квадратный трехчлен с полным правом можно назвать основной из функций, изучаемых в школьном курсе математики. Если не считать самой простой функции – линейной, то это единственная функция, для которой в школьном курсе могут быть достаточно строго доказаны основные свойства, составляющие содержание теории и необходимые для решения задач.

Актуальность курса определяется значимостью понимания школьниками особого положения квадратного трехчлена в школьном курсе. В то же время в школьном курсе алгебры рассматриваются лишь самые простые, непосредственные применения свойств квадратного трехчлена в стандартных ситуациях – таких, как решение квадратных уравнений и неравенств, нахождение условий существования решений, определение знаков корней, отыскание наибольшего или наименьшего значения квадратного трехчлена и т.п.

Вместе с тем и на письменных, и на устных вступительных экзаменах в вузы предлагается большое число разнообразных задач различной сложности, решаемых с помощью свойств квадратного трехчлена. Возникшее противоречие между школьной программой и программой вступительных экзаменов в вузы может разрешить данный элективный курс «Квадратный трехчлен в задачах». Безукоризненное знание свойств квадратного трехчлена, умение применять эти свойства для решения задач фактически требуется от каждого ученика для его дальнейшего изучения математики в старших классах математического профиля и каждого поступающего в вуз, где на вступительном экзамене приходится держать испытание по математике.

Цель курса:

показать некоторый общий подход, с помощью которого учащийся, владеющий «азбукой» квадратного трехчлена, сам может при необходимости получить и доказать соответствующее утверждение.

Задачи курса:

видеть квадратный трехчлен во всех его разнообразных формах и уметь использовать его свойства для решения задач, внешне не связанных с квадратным трехчленом;
владеть геометрической интерпретацией задач, связанных с квадратным трехчленом;
уметь исследовать квадратный трехчлен не только на всей числовой прямой, но и на конкретном числовом множестве.

В содержании программы курса предлагаются ряд свойств квадратного трехчлена, не изучающихся в школьном курсе, но непосредственно к ним примыкающих и которые, в основном, легко доказываются на основе школьных знаний уровня обязательного минимума. Среди этих свойств самые главные – это многочисленные необходимые и достаточные условия для того или иного расположения корней трехчлена, для сохранения знака трехчлена на некотором промежутке, для определения связи между двумя заданными квадратными трехчленами и т. п.

Совокупность этих свойств не следует рассматривать как некоторую «расширенную теорию» квадратного трехчлена, а стремиться ставить более общие вопросы и получать при этом новые свойства квадратного трехчлена – для применения на практике, а не для обогащения теории.

Для практической части необходимо подбирать из действующих учебников алгебры 8-9 классов, отмеченные (*), а также задачи повышенной трудности. Для развития мотивации к изучению курса следует подбирать (заимствовать) задачи из материалов вступительных экзаменов в вузы, либо с некоторыми изменениями в них, такими, чтобы задачи непосредственно примыкали к задачам вступительных экзаменов и по содержанию, и по уровню трудности. С другой стороны, содержание вступительных экзаменов, уровень трудности предлагаемых задач достаточно неопределенны, и поэтому решение этих более сложных задач позволит построить процесс диагностики для создания 10 класса математического профиля и, кроме этого, создаст «запас прочности» на будущее.

При решении задач, связанных с квадратным трехчленом, естественно возникает ряд вопросов, имеющий более общий характер и важных как для общего развития учащихся, так и для расширения их возможностей в решениях задач.

В целях контролируемости данной программы предлагается использовать создание материала по теме из вступительных экзаменов с решениями к ним, выполненными учащимися.

На заключительном занятии элективного курса можно провести конференцию учащихся с подведением итогов решения задач и предоставления каждому слушателю своей папки с решенными в ней задачами, заинтересовавшими их.

Данный курс предусматривает не только классно-урочную и лекционно-практическую системы, но и использование личностно-ориентированных педагогических технологий. При решении задач значительное место должно занимать поиски идей решения, эвристические соображения, и только затем, само решение, найденное эвристически, проводится строгим логическим рассуждением.

Предлагаемый курс рассчитан на 43 часа. Он может быть использован как отдельный элективный курс, с одной стороны, и для расширения и углубления ЗУНов, с другой – при изучении профильного курса математики и наличии дополнительного времени на его изучение.

Программа построена таким образом, что учитель сам может решать сколько и какие темы в неё включить в зависимости от уровня подготовленности учащихся. Темы содержательной части программы расположены по нарастающей степени сложности и трудности, при этом учитель вправе ограничиться подбором таких заданий практического содержания, которые будут доступны всем учащимся и одновременно повысят уровень их математических знаний и создадут необходимый уровень знаний для продолжения изучения математики в 10 классе математического профиля. Данный элективный курс может быть использован учителем и в старших 10-11 классах для развития и систематизации знаний учащихся по теме и подготовки их к итоговой аттестации, ЕГЭ и вступительным испытаниям в вузы.

При заинтересованности учащихся данной темой количество часов на него может быть увеличено за счет изучения всех тем программы, а также его практической части с большей опорой на задачи вступительных экзаменов в вузы.

СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ ЧАСТЬ ПРОГРАММЫ

Тема 1.

Азбука квадратного трехчлена (4 часа).

Корни квадратного трехчлена. Решение квадратных уравнений. Теорема Виета и следствие о знаках корней. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители. Знаки значений квадратного трехчлена. Решение квадратных неравенств.

Тема 2.

Квадратный трехчлен в неявном виде (13 часов).

Изображение на координатной плоскости множества точек, координаты которых удовлетворяют заданному уравнению или неравенству. Доказательство неравенств с применением свойств квадратного трехчлена. Неравенство Коши-Буняковского. Решение уравнений с двумя переменными и их систем, содержащих квадратный трехчлен в неявном виде. (Доказательство тождеств и разложение многочленов на множители с помощью выделения квадратного трехчлена, заданного в неявном виде, и применения свойств квадратного трехчлена.)

Тема 3.

Коэффициенты, корни и значения квадратного трехчлена (10 часов).

Свойства квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$: $f(0) = c$; $f(1) = a + b + c$;

$f(-1) = a - b + c$ и их применение для решения практических задач. Связь коэффициентов квадратного трехчлена с его корнями. Геометрическая интерпретация существования корней квадратного трехчлена со знаками его значений.

Тема 4.

Исключение «лишних» корней квадратного трехчлена (7 часов).

Простейшие уравнения с параметрами, методы их решения на примерах решения квадратных, дробно-линейных уравнений.

Тема 5.

Отбор корней квадратного трехчлена (9 часов).

Задачи, сводящиеся к исследованию принадлежности корней квадратного трехчлена ограниченной области: корни трехчлена не должны принимать определенные («запрещенные») значения; корни трехчлена должны лежать на некотором луче (открытом или замкнутом, т.е. с концами включенными или исключенными); корни трехчлена должны лежать на некотором конечном промежутке).

УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№ п/п	Тема	Количество часов	в том числе:	
			уроки- лекции	уроки- практикумы
1. Азбука квадратного трехчлена (4 часа)				
1	Корни квадратного трехчлена. Решение квадратных уравнений	1	0,5	0,5
	Теорема Виета и следствие о знаках корней	1	0,5	0,5
	Разложение квадратного трехчлена на линейные множители	1	0,5	0,5
	Знаки значений квадратного трехчлена. Решение квадратных неравенств	1	0,5	0,5
Квадратный трехчлен в неявном виде(13 часов)				
	Изображение на координатной плоскости множества точек, координаты которых удовлетворяют заданному уравнению, неравенству	4	1	3
	Доказательство неравенств. Неравенство Коши-Буняковского	3	0,5	2,5
	Решение уравнений с двумя переменными и их систем, содержащих квадратный трехчлен в неявном виде	3		3
	Доказательство тождеств и разложение многочленов на множители	3		3
3. Коэффициенты, корни и значения квадратного трехчлена(10 часов)				
	Свойства квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$; $f(0) = c$; $f(1) = a + b + c$; $f(-1) = a - b + c$	1		1
	Связь коэффициентов квадратного трехчлена с его корнями	2	1	1
	Геометрическая интерпретация корней квадратного трехчлена со знаками его значений	3	1	2
	Задачи вступительных экзаменов в вузы и ЕГЭ по теме	4		4
4. Исключение "лишних" корней квадратного трехчлена (7 часов)				
	Квадратные уравнения с параметрами	3	1	2
	Дробно-линейные уравнения с параметрами	4	1	3

Отбор корней квадратного трехчлена (9 часов)				
	Отбор корней квадратного трехчлена, которые не должны принимать определенные значения	3	1	2
	Отбор корней квадратного трехчлена на луче	3		3
	Отбор корней квадратного трехчлена на конечном промежутке	3		3

МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ ПРОГРАММЫ

Требования к уровню усвоения учебного материала

В результате изучения программы элективного курса «Квадратный трехчлен в задачах» учащиеся получают возможность:

ЗНАТЬ:

формулу корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (общую и для случая $a = 1$ – четное число);

теорему Виета для квадратного уравнения в общем виде и приведенного квадратного уравнения;

теорему, обратную теореме Виета;

график квадратного трехчлена;

особенности графиков квадратных трехчленов (наличие оси симметрии, вершины, направление ветвей, расположение по отношению к оси x);

квадратный трехчлен в неявном виде;

геометрическую интерпретацию корней квадратного трехчлена и расположение его графика в зависимости от коэффициентов.

УМЕТЬ:

выделять квадрат двучлена из квадратного двучлена;

решать квадратные уравнения;

определять количество корней квадратного уравнения по знаку его дискриминанта;

решать неполные квадратные уравнения;

применять теорему Виета и обратную ей для составления квадратного уравнения по его корням и нахождения корней квадратного уравнения;

определять зависимость между корнями квадратного уравнения и его коэффициентами;

строить график квадратичной функции и читать его, используя свойства квадратного трехчлена;

решать неравенства второй степени с одной переменной;

решать задачи прикладного характера с опорой на графические представления;

раскладывать квадратный трехчлен на множители;

исследовать решение квадратных и дробно-линейных уравнений с параметрами;

производить отбор корней квадратного трехчлена на луче и конечном промежутке;

исключать «посторонние» корни;

использовать свойства квадратного трехчлена, заданного неявно.

При реализации программы целесообразно:
адаптировать учебный материал соответственно уровню подготовки контингента обучающихся. При этом доступность содержания не должна наносить ущерб его научности;
при обсуждении задач использовать эвристику – искусство поиска решения, в котором можно пользоваться какими угодно соображениями, нестрогими рассуждениями, в частности, геометрической интерпретацией, и вообще, всем, что придет в голову, и главное – не надо никому объяснять, почему именно применяются те или иные соображения, лишь бы они привели к успеху, нахождению решения и только потом устанавливать его истинность;
предельно ориентировать содержание изученного на практическое применение;
уделять большое внимание процессу целеполагания;
обеспечить условия, необходимые для овладения способами самостоятельного взаимодействия с различными источниками информации настоящего времени;
использовать разнообразные методы контроля, итоговой формой контроля является сдача папки с решенными задачами по курсу (не менее 1 задачи за занятие);
считать критерием эффективности изучения программы повышение интереса к предмету и дальнейшее обучение в 10 классе математического профиля.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Алгебра: Учебник для 8 класса общеобразовательных учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; Под редакцией С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 1989-2003.
- Алгебра: Учебник для 9 класса общеобразовательных учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; Под редакцией С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 1990-2003.
- Дудницын Ю.П. Контрольные работы по алгебре. 8 класс. / Под редакцией А.Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 1998.
- Дудницын Ю.П. Контрольные работы по алгебре. 9 класс. / Под редакцией А.Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 1999.
- Жохов В.И., Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. Дидактические материалы по алгебре для 8 класса. – М.: Просвещение, 1991-2003.
- Жохов В.И., Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. Дидактические материалы по алгебре для 8 класса. – М.: Просвещение, 1992-2003.
- Кузнецова Л.В., Бунимович Е.А., Пигарев Б.П., Суворова С.Б. Сборник заданий для проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы. 9 класс. – М.: Дрофа, 2000-2003.
- Мордкович А.Г. Алгебра.: Учебник для 8 класса общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 1997.
- Мордкович А.Г., Тульчинска Е.Е., Мишутина Т.Н. Алгебра. 8 класс. Задачник для общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 1997.
- Мордкович А.Г. Алгебра.: Учебник для 9 класса общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 1999.
- Мордкович А.Г., Тульчинска Е.Е., Мишутина Т.Н. Алгебра. 9 класс. Задачник для общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 1999.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Алгебра: Учебник для 8 класса общеобразовательных учреждений. /Ш.А. Акимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. – М.: Просвещение, 1991-2003.
- Алгебра: Учебник для 9 класса общеобразовательных учреждений /Ш.А. Акимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. – М.: Просвещение, 1992-2003.
- Алгебра: Для 8 класса. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. / Н.Я. Виленкин, Т.С. Сурвилло и др.; Под редакцией Н.Я. Виленкина – М.: Просвещение, 1995.
- Алгебра: Учебное пособие для учащихся 9 класса с углубленным изучением математики. / Н.Я. Виленкин, Т.С. Сурвилло, А.С. Симонов, А.И. Кудрявцев; Под редакцией Н.Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 2001.
- Алгебра. 9 кл. Учебник для общеобразовательных заведений / К.С. Муравин, Г.К. Муравин, Г.В. Дорофеев. – М.: Дрофа, 2000.
- Алгебра. 8 кл. Учебник для общеобразовательных учреждений / С.М. Никольский, В.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин – М.: Просвещение, 2000.
- Алгебра. 9 кл. Учебник для общеобразовательных учреждений / С.М. Никольский, В.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин – М.: Просвещение, 2002.
- Болтянский В.Г., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И. Лекции и задачи по элементарной математике. – М.: Наука, 1972.
- Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Курс алгебры 8-го класса в задачах (для классов с углубленным изучением математики) – Львов: Журнал «Квантор», 1991.
- Королёва Т.М., Маркарян Е.Г., Нейман Ю.М. Пособие по математике в помощь участникам централизованного тестирования по математике. – М.: Прометей, 2000.
- Крамор В.С. Примеры с параметрами и их решение. Пособие для поступающих в вузы. – М.: АРКТИ, 2000.
- Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. Алгебра: Дополнительные главы к школьному учебнику 8 кл.: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / Под редакцией Г.В. Дорофеева. – М.: Просвещение, 1996.
- Математика. 8 кл: Алгебра. Функции. Анализ данных: Учебник для общеобразовательных учебных заведений / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др.; Под редакцией Г.В. Дорофеева. – М.: Дрофа, 2000.
- Математика. 9 кл: Алгебра. Функции. Анализ данных: Учебник для общеобразовательных учебных заведений / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др.; Под редакцией Г.В. Дорофеева. – М.: Дрофа, 2000.
- Родионов Е.М. Математика: Решение задач с параметрами: Пособие для поступающих в вузы. – М.: Учебный центр «Ориентир» при МГТУ, 2001.
- Сборник задач по алгебре для 8-9 классов: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич. – М.: Просвещение, 1992.
- Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учебное пособие для 10 кл. средней школы. – М.: Просвещение, 1989.